ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

ΜΑΘΗΜΑ

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ’ ΓΕΛ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

11:30

φροντιστήρια πουκαμισάς

Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 111

Α.2. Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 104

Α.3. Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 128

Α.4. α. Λ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

$g(x)=\frac{4-e^{2x}}{e^x}$, $D_g=\mathbb{R}$ και $h(x)=\ln x$, $D_h=(0,+\infty)$

Β.1. $D_f=D_{g\circ h}=\begin{Bmatrix} x\in D_h \\ h(x)\in D_g \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} x>0 \\ \ln x\in\mathbb{R} \end{Bmatrix}=(0,+\infty)$

$$f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}}=\frac{4-x^2}{x},x>0$$

Άρα $f(x)=\frac{4-x^2}{x},x>0$

Β.2. i) $f'(x)=\left(\frac{4-x^2}{x}\right)'=\frac{-2x\cdot x-(4-x^2)}{x^2}=\frac{-2x^2-4+x^2}{x^2}=\frac{-(x^2+4)}{x^2}<0$ στο $(0,+\infty)$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

ii) $\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}\overset{4-e^2<0}{\Leftrightarrow}\frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}\Leftrightarrow f(\pi)<f(e)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}\pi>e$ που ισχύει

Β.3. Η f είναι συνεχής στο $D_f=(0,+\infty)$ ως ρητή

Κατακόρυφη ασύμπτωτη

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(4-x^2)\frac{1}{x}\right]=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(4-x^2)=4>0$

$\lim\limits_{x\to0^+}x=0, x>0$ άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

Επομένως η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Πλάγια ασύμπτωτη

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{\frac{x}{1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-1)x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x^2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0=\beta$$

Επομένως η ευθεία $\varepsilon: y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

B.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{\dfrac{4-x^2}{x^2}}$

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{\dfrac{4-x^2}{x^2}}\right|=\frac{\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|}{\left|\dfrac{4-x^2}{x^2}\right|}\le\frac{1}{\left|\dfrac{4-x^2}{x^2}\right|}=\frac{x}{-4+x^2}\ \text{αφού}\ x\to+\infty$$

$$-\frac{x}{-4+x^2}\le\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\le\frac{x}{-4+x^2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{-4+x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\\&\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{-4+x^2}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\end{aligned}\right\}\overset{\textit{κριτήριο}}{\underset{\textit{παρεμβολής}}{\Longrightarrow}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. $\int_2^3 x\cdot f(x)\,dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)\,dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3 \left(x+\frac{\alpha x^2}{2}\right)' dx=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[x+\frac{\alpha x^2}{2}\right]_2^3=1 \Leftrightarrow 3+\frac{9\alpha}{2}-(2+2\alpha)=1 \Leftrightarrow \cancel{3}+\frac{9\alpha}{2}\cancel{-2}-2\alpha=\cancel{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\alpha-4\alpha=0 \Leftrightarrow 5\alpha=0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=0}$$

Γ.2. Αφού $\alpha=0$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x} & ,x\geq 1 \end{cases}$ με $\mathrm{A}=D_f=(-\infty,+\infty)$

i) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-2)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-(x-1)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-1$

Επομένως f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$ άρα και f συνεχής στο $x_0=1$

Επομένως ορίζεται η εφαπτομένη στο 1.

ii) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ έχει εξίσωση

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=-1(x-1) \Rightarrow y=-x+2$$

και $f'(1)=-1=\varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=-\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right) \overset{\omega\in[0,\pi)}{\Leftrightarrow} \omega=\dfrac{3\pi}{4} \quad (135^o)$

Γ.3. Για $x<1$:

$f'(x)=2x-3$

$$x<1 \Rightarrow 2x<2 \Leftrightarrow 2x-2<0 \Leftrightarrow 2x-2-1<-1 \Rightarrow f'(x)<-1<0$$

Άρα $f'(x)<0$ στο $(-\infty,1)$ άρα $f \searrow$ στο $(-\infty,1)$

Για $x>1$:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0 \text{ άρα } f'(x)<0 \text{ άρα } f\searrow \text{ στο } (1,+\infty)$$

Και επειδή f συνεχής στο 1, έχουμε ότι f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως f: "$1-1$" στο $\mathbb{R}$

$f(\mathrm{A})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

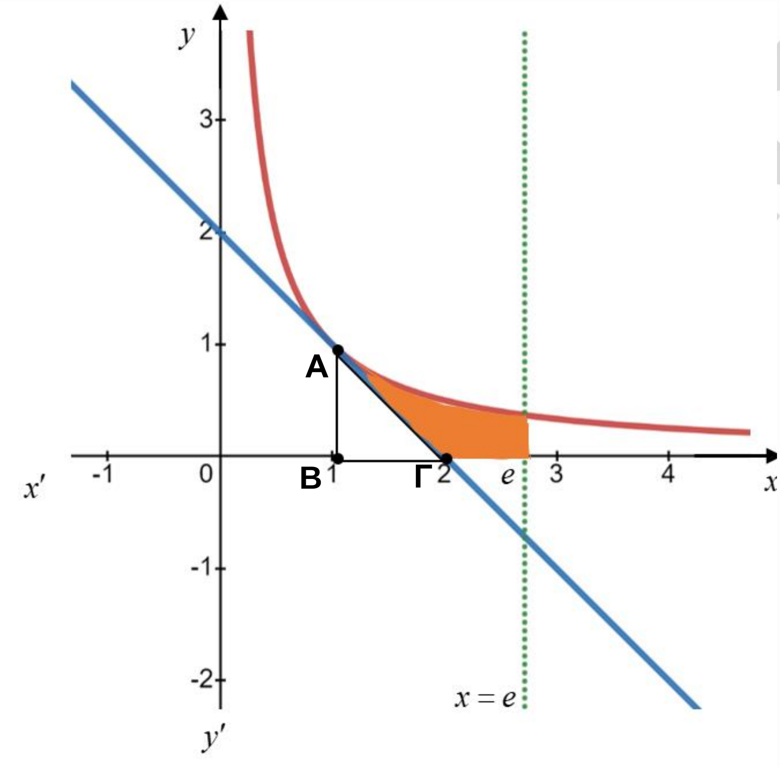
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathrm{A})=(0,+\infty)$$

Γ.4. Για $x \geq 1,\ f(x)=\frac{1}{x},\ f'(x)=-\frac{1}{x^2},\ f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$

Άρα f κυρτή στο $[1,+\infty)$, επομένως $f(x)\geq g(x)$, όπου $g(x)=-x+2,\ x\in\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως ρητή

Η g είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως πολυωνυμική



$f(x)=\frac{1}{x},\quad g(x)=-x+2,\quad h(x)=0$ (άξονας $x'x$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\Omega) &= \int_1^2 \left|\left(f(x)-g(x)\right)\right|dx+\int_2^e \left|f(x)\right|dx= \\
&= \int_1^2 \left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_2^e f(x)\,dx= \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx+\int_2^e \frac{1}{x}dx= \\
&= \left[\ln|x|+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2+\left[\ln|x|\right]_2^3= \\
&= \ln 2+2-4-\frac{1}{2}+2+\ln e-\ln 2= \\
&= 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \ \tau.\mu.
\end{aligned}$$

β’ τρόπος

$$\mathrm{E}=\int_1^e f(x)\,dx-\left(\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}\right)=\int_1^e f(x)\,dx-\frac{1}{2}|\mathrm{AB}||\mathrm{B\Gamma}|=\int_1^e\left(\frac{1}{x}\right)dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\ln e-\ln 1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}$, $x\in(0,1)\cup(1,2)$, τότε $\lim\limits_{x\to1} g(x)=l\in\mathbb{R}$

Άρα $f(x)-2x=g(x)(x-1)\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-1)+2x$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\big(g(x)(x-1)+2x\big)=l\cdot0+2\cdot1=2\\&\text{Όμως }\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+k\right)=\ln1-1+k=k-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow k-1=2\Leftrightarrow \boxed{k=3}$$

Άρα $f(x)=\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3,\ x\in(0,2)$

Δ.2. $f'(x)=\dfrac{1}{2-x}\cdot(2-x)'+\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}=\dfrac{-x^2-x+2}{x^2(2-x)},\ x\in(0,2)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-x^2-x+2}{x^2(2-x)}=0\Leftrightarrow -x^2-x+2=0\Leftrightarrow-(x-1)(x+2)=0\Leftrightarrow\left\langle\begin{array}{l}x=1,\ \text{δεκτή}\\ \text{ή}\\ x=-2,\ \text{απορ.}\end{array}\right.$$

Για το πρόσημο του $-x^2-x+2$ έχουμε:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Και για κάθε $x\in(0,2)$ έχουμε $x^2(2-x)>0$

Οπότε οι ρίζες και το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς και τα διαστήματα της μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
f		$-\infty$	$\nearrow$	ΟΛ.ΜΕΓ. 2	$\searrow$	$-\infty$	

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$$

γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\big(\ln(2-x)\big)=\ln2$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x)\right) \underset{\substack{x\to 2^- \\ u\to 0^+}}{\overset{u=2-x}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ η $f(x)$ είναι συνεχής και $\nearrow$

Άρα $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$

$0 \in (-\infty, 2)$, άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Επειδή $f \nearrow$ στο Δ_1, το x_1 είναι μοναδικό.

Στο διάστημα $\Delta_2 = [1,2)$ η $f(x)$ είναι συνεχής και $\searrow$

Άρα $f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x\to 2^-} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$

$0 \in (-\infty, 2)$, άρα υπάρχει $x_2 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

Επειδή $f \searrow$ στο Δ_2, το x_2 είναι μοναδικό.

Τελικά υπάρχουν ακριβώς δύο x_1, x_2 : $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$ τα οποία είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\frac{5}{3} - 3 + 3 = \ln\frac{5}{3} > 0$ άρα $f(x_1) = 0$ και $f \nearrow$ στο $[x_1, 3]$, άρα $x_1 < \frac{1}{3}$

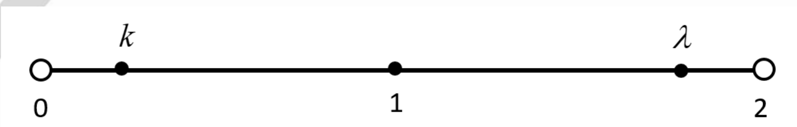
β' τρόπος (για μοναδικότητα των x_1, x_2)

Παρατηρούμε ότι:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, επομένως υπάρχει $k > 0$ κοντά στο 0 τέτοιο ώστε $f(k) < 0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, άρα υπάρχει $\lambda < 2$ κοντά στο 2 τέτοιο ώστε $f(\lambda) < 0$

$f(1) = 2 > 0$



Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano, στα διαστήματα $[k,1]$ και $[1,\lambda]$, στα οποία πληρούνται οι προϋποθέσεις του, αφού f συνεχής ώς πράξη συνεχών συναρτήσεων .

Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (k,1) \subseteq (0,1)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (1,\lambda) \subseteq (1,2)$, τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1]$ και $[1,2)$, η f είναι γνησίως μονότονη και άρα "$1-1$", οπότε οι ρίζες είναι μοναδικές.

β' τρόπος (για την ανίσωση)

$x_1<1\Rightarrow -x_1>-1\Rightarrow 2-x_1>2-1\Rightarrow 2-x_1>1\Rightarrow \ln(2-x_1)>0$

Όμως $f(x_1)=0\Leftrightarrow \ln(2-x_1)-\frac{1}{x_1}+3=0\Rightarrow \frac{1}{x_1}=\ln(2-x_1)+3>3$ αφού $\ln(2-x_1)>0$ άρα

$x_1<\frac{1}{3}$ αφού $x_1>0$

Δ.3. Η $f(x)$ είναι συνεχής σαν πράξη συνεχών συναρτήσεων στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$ και παραγωγίσιμη σαν πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$

Από Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-\cancel{f(x_1)}}{\frac{1}{3}-x_1}=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}}=\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Επομένως η κλίση της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$ είναι: $\lambda_\varepsilon=f'(\xi)=\dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

$f''(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{2}{x^3}<0$ για $x\in(0,2)$ άρα $f'\searrow$ άρα "$1-1$" άρα το ξ μοναδικό.

Δ.4. i) Αφού F,G παράγουσες της f, έχουμε ότι $F'(x)=G'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in(0,2)$

Άρα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(x)=G(x)+c$ ①

$$\left.\begin{array}{l}\text{Για } x=x_1\overset{①}{\Rightarrow}F(x_1)=G(x_1)+c\overset{F(x_1)=0}{\Leftrightarrow}c=-G(x_1)\\ \text{Για } x=x_2\overset{①}{\Rightarrow}F(x_2)=G(x_2)+c\overset{G(x_2)=0}{\Leftrightarrow}c=F(x_2)\end{array}\right\}\Rightarrow -G(x_1)=F(x_2)\Leftrightarrow F(x_2)+G(x_1)=0$$

ii) Ορίζουμε τη συνάρτηση $H(x)=x_1\cdot F(x)+x_2\cdot G(x)-x_1-x_2+2x,\ x\in[x_1,x_2]$

Η $H(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και $H(x_1)\cdot H(x_2)<0$

Γιατί:

$$H(x_1)=\cancel{x_1F(x_1)}+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=x_2G(x_1)+x_1-x_2<0$$

$$H(x_2)=x_1F(x_2)+\cancel{x_2G(x_2)}-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)-x_1+x_2\overset{\Delta 4(i)}{=}-x_1G(x_1)-x_1+x_2>0$$

γιατί $f([x_1,x_2])=[f(x_1),f(1)]\cup[f(x_2),f(1)]=[0,2]\cup[0,2]=[0,2]$

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$

Όμως $G'(x)=f(x)>0$ άρα $G\nearrow$ στο $[x_1,x_2]$ αφού G συνεχής στο $[x_1,x_2]$

Άρα $x_1<x_2\Rightarrow G(x_1)<G(x_2)=0$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}G(x_1)<0\\ x_2>0\end{array}\right\}\overset{(\cdot)}{\Rightarrow}x_1G(x_1)<0\\ \qquad\qquad x_1-x_2<0\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}H(x_1)<0 \quad \text{και} \quad \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}G(x_1)<0\\ x_1>0\end{array}\right\}\overset{(\cdot)}{\Rightarrow}-x_1G(x_1)>0\\ \qquad\qquad x_2-x_1>0\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}H(x_2)>0$$

Από Θ. Bolzano, η εξίσωση $H(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1,x_2).

Ακόμη $H'(x)=x_1\cdot F'(x)+x_2\cdot G'(x)+2=x_1f(x)+x_2f(x)+2=(x_1+x_2)f(x)+2>0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$ αφού

$$\left.\begin{array}{l}x_2>0\\ x_1>0\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}x_1+x_2>0$$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$ επομένως $(x_1+x_2)f(x)+2>0$

Άρα $H(x)\nearrow$ στο $[x_1,x_2]$ άρα $H(x)$ "1−1", επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

β’ τρόπος

μπορεί να γίνει και με χρήση του Θ.Μ.Τ.